

Title	函数方程式二就テ II
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 71 p.7-p.12
Issue Date	1935-12-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74227
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

305. 函数方程式 = 就テ II

福原 満洲 雄 (北大)

§ 1. 存在定理 2. 「 E は *espace, normé et complet*;
 K は 實軸上ノ線分; Ω は $(E \times K)$ 内開いた集合; $F(x, k)$
は $\bar{\Omega}$ 内 *complètement continue (vollstetig)*,

即チ連続且ツ $F(\bar{\Omega})$ が E デ *compact*; Ω ノ縁 Ω' デ

$$x - F(x, k) \neq 0;$$

K = 属スル或値 k_0 デ

$$(a_0) \quad x - F(x, k_0) = 0$$

ノ解ノ *indice total* が 0 デナイトスル、其ノ時

$$(a) \quad x - F(x, k) = 0$$

ハ K = 属スル任意ノ値 k = 對シテ解ヲ持ツ」

コレハ *Leray et Schauder* が得タ結果デアル (*Ann. Ec. norm.*, 1934). 彼等ハコレヲ楕円型偏微分方程式 = 關スル *Dirichlet* ノ問題 = 應用シテ從來ノ結果ヲ含ム一般的结果ヲ得テ居リ、更ニ *Théorie du sillage* = 應用スルト豫告シテ居ル。

此ノ存在定理カラ次ノ系ヲ導カレル。

系 1. 「 ω ハ E デ開イタ、 O ノ内部 = 含ム有界ノ星形ノ集合; $F(x)$ ハ $\bar{\omega}$ デ *complètement continue*; ω ノ縁 ω' ノ上デハ

$$x - F(x) \neq 0;$$

且ツ $F(\bar{\omega}) \subset \bar{\omega}$ ナラバ方程式

$$(a') \quad x - F(x) = 0$$

ハ解ヲ持ツ」

存在定理 1 ハ此ノ特別ノ場合デアル、此ノ形ノ存在定理トシテハ *Tychonoff* ノ結果ガアル、彼ノ場合 = ハ ω ハ *convexe* デアルガ、空間 E = 關スル假定ハ緩クナツテ

ル。従ッテ *Leray et Schauder* ノ結果ヲモット廣イ
空間 = 擴張スルコトが出来ナイデアラウカトイフ問題が起ル
ノデアルガ、ソレ = 関シテハ別ノ機會ニ述ベルコトニシテ、
ココデハ存在定理2ノ簡單ニ應用ヲ述ベヨウ。

系2. 「 K ハ $0 \leq k \leq 1$; ω_ε ハ $\|x\| < M - \varepsilon$ (ε ハ任
意ノ正ノ数) ナル E ノ点 x ノ集合; $\mathcal{B}_\varepsilon = (\omega_\varepsilon \times K)$;
 $F(x, 0) = 0$; $F(x, k)$ ハ $\overline{\mathcal{B}_\varepsilon}$ デ *complètement con-*
tinue; 更ニ任意ノ k ノ値ニ對シ (α) ノ解ハ多クとも一ツ
デアルトスル、其ノトキ (α) ハ $0 \leq k \leq 1$ デ常ニ解ヲ持ツカ、
又ハ $0 \leq k < k_0$ ($0 < k_0 \leq 1$) デ (α) ノ解ヲ持チ、其ノ解ヲ
 $x(k)$ デ表ハシタトキ

$$\lim_{k \rightarrow k_0 - 0} \|x(k)\| = M$$

トナルヤウナ k_0 が存在スル」

§2. 系2ニ於テ $M = +\infty$ トスルコトモ出来ル、ソレ
カラ容易ニ次ノ定理ヲ得ル、

定理3. 「 $F(x)$ ハ *linéaire, homogène* 且
ツ E ノ有界ナ集合デ *complètement continue*;

$$(b) \quad X - kF(X) = 0$$

ハ $0 \leq k \leq 1$ ノトキ0デナイ解ヲ持タナイトスル、其ノトキ
 X = 関スル方程式

$$(c) \quad x = X - F(X)$$

ハ唯一ツ解ヲ持チ、ソレヲ

$$X = x - G(x)$$

ト書ケバ $G(x)$ 亦 *linéaire, homogène* 且ツ E
ノ有界+集合デ *complètement continue* ナアル」
コレカラ次ノ結果ヲ得ル。

定理4. 「 x_0 ハ (a') ノ一ツノ解, 即チ $x_0 = F(x_0)$;
 $F(x)$ ハ x_0 ノ近傍デ微分ヲ持ツ, 即チ

$$F(x) - F(x_0) = L(x - x_0) + f(x - x_0)$$

= 於テ $L(X)$ ハ *linéaire, homogène* 且ツ有界+集
合デ *complètement continue*, $\|X\| \rightarrow 0$ ノ時
 $\|f(X)\| / \|X\| \rightarrow 0$;

$$X - kL(X) = 0$$

ハ $0 \leq k \leq 1$ ノトキ0デナイ解ヲ持タナイトスル、其ノト
キ (a') ノ解 x_0 ハ孤立シテナル、即チ正ノ数 ε ヲ十分ニ小サ
ク取レバ $\|x - x_0\| < \varepsilon$ ナル範囲 = (a) ノ解ハ存在シナイ」

続イテ次ノ定理ヲ得ル。

定理5. 「 x_0 ハ (a_0) ノ解, 即チ $x_0 = F(x_0, k_0)$;
 $F(x, k)$ ハ (x_0, k_0) ノ近傍デ微分ヲ持ツ, 即チ

$$F(x_0 + \xi, k_0 + \eta) - F(x_0, k_0) = L(\xi, \eta) \\ + R(\xi, \eta)$$

= 於テ

$L(\xi, \eta)$ ハ *linéaire, homogène* 且ツ有界
+集合デ *complètement continue*, $\|\xi\| + |\eta| \rightarrow 0$
ノトキ

$$\|R(\xi, \eta)\| / \{\|\xi\| + |\eta|\} \rightarrow 0;$$

$$y - kL(y, 0) = 0$$

ハ $0 \leq k \leq 1$ デ 0 デ ナイ 解ヲ持タ ナイ トスル、其ノトキ (a) ハ $k \rightarrow k_0$ ナラバ $x \rightarrow x_0$ デアル ヲ ナイ 解ヲ持ツ、ソレヲ $x(k)$ デ表ハセバ $k \rightarrow k_0$, 特

$$\frac{x(k) - x_0}{k - k_0} \rightarrow y_0$$

トナル、茲 $= y_0$ ハ

$$y - L(y, 1) = 0$$

ノ 解 デアル」

§3. 以上トテ實軸上ノ線分トシタガ、一般ニソレヲ或空間ノ連続体トイフ形ニ拡張スルコトモ出來ル、併シソノヤリナ擴張ハ大シテ興味カナイト *Leray et Schauder* ハ述ベテ居ルガ、果シテ興味ノアルコトカナイコトカ連断スルコトハ出來ナイデアラウ、例ヘバ最後ニ述ベタ $x(k)$, k ニ關スル微分可能性ノ如キハ k ヲ複素変数トシ、 k_0 ガ D ヲ含ム領域 D ノ任意ノ点デヨイナラバ、 $x(k)$ ヲ k ノ函数ト考ヘタトキ D デ正則デアルコトヲ示ス、此ノ方法ハ方程式ガ線形デアルト否トニ拘ラズ使ヘル所ガ注目ニ値スルデアラウ、特ニ $F(X)$ ガ *linéaire, homogène* 且ツ有界ノ集合デ *complètement continue* ナラバ X ニ關スル方程式

$$(b') \quad x = X - kF(X)$$

ハ第二種ノ *Fredholm* 積分方程式ヲ抽象化シ、 ϵ, η ニナ

ル。

上ニ述ベタマウナ方法デ其ノ解 $X(k)$ が k ノ有理型函数
ニナルトイフマウナ所マデ達スルコトが出来ルデアラウカ、
未ダ解決ヲ得テ居ナイガ次ノ事實ハ証明出来ル、

定理6. 「点列 k_1, k_2, \dots ハ k_0 ニ収斂シ、 $k=k_0$
ノトキ (B') ハ解ヲ持タズ、 $k=k_1, k_2, \dots$ ノトキニハ
 (B') ハ唯一ツ解ヲ持ツナラバ

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |k_j - k_0| \cdot \|X(k_j)\| > 0$$

デアル」

私カ注意シタイコトハ此等ノ定理ソノモノデハナク、ソ
レラガ存在定理2カラ次々ニニツナガリトナツテ引出サレタ
モノデアルトイフコトデアル。